

УДК 518.5

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, В. А. Рязанцев

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследование тепловых полей играет огромную роль при решении многих физических и технических проблем. Достаточно упомянуть только такие направления, как термодинамика и тепло-разведка. Тепловые поля имеют сложную структуру, не поддающуюся аналитическому представлению. Поэтому актуальными являются методы равномерной аппроксимации полей во всей области их определения. Помимо разработки методов равномерной аппроксимации тепловых полей, актуальной является разработка оптимальных по точности, сложности и памяти методов аппроксимации и восстановления тепловых полей. При исследовании физических полей разнообразной природы возникают следующие задачи: 1) построение алгоритмов равномерной аппроксимации полей в рассматриваемой области; 2) разработка оптимальных методов аппроксимации полей в заданной области. *Материалы и методы.* Для решения указанных задач в статье предлагается метод, общий для физических полей любой природы. Для построения наилучшего равномерного приближения физического поля определяется функциональный класс, к которому принадлежит данное поле, вычисляются поперечники Колмогорова и Бабенко соответствующего класса функций и строятся сплайны, являющиеся оптимальным методом приближения. Определяется класс функций, к которому принадлежат решения параболических уравнений и строятся равномерные в метрике пространства C аппроксимации этих решений в виде локальных сплайнов. Показано, что построенный алгоритм аппроксимации отличается от оптимального мультипликативным множителем. *Результаты.* В данной работе предложены эффективные методы равномерного восстановления тепловых полей. *Выводы.* Результаты работы могут использоваться при разработке численных методов моделирования задач теплоразведки и термодинамики.

Ключевые слова: тепловое поле, равномерная аппроксимация, локальный сплайн, оптимальные методы, класс функций, поперечник Колмогорова, поперечник Бабенко.

I. V. Boykov, N. P. Krivulin, V. A. Ryazantsev

OPTIMAL METHODS OF THERMAL FIELD APPROXIMATION

Abstract. *Background.* The research of thermal fields represents significant importance in solution of multiple physical and technical problems. Suffice it to mention such fields as thermodynamics and thermal prospecting. Thermal fields have a complex structure impossible to be presented analytically. Therefore the methods of uniform approximation appear to be topical in the whole area of determination thereof. Besides the development of methods of uniform approximation of thermal fields it is topical to develop methods of approximation and restoration of thermal

fields accurate in precision, complexity and memory. In the research of physical fields of various nature there appear the following problems: 1) building of algorithms of uniform approximation of fields in the area under consideration; 2) development of optimal methods of field approximation in the area under consideration. *Methods and materials.* To solve the said problems the authors suggest a method common for physical fields of any nature. To build the best uniform approximation of a physical field it is necessary to determine the functional class, to which the said field belongs, to calculate Kolmogorov and Babenko widths of the corresponding class and to build splines being the optimal method of approximation. The researchers determine the class of functions, to which belong the solutions of parabolic equations, and build approximations, uniform in C space metrics, of the said solutions in the form of local splines. It is shown that the built algorithm of approximation differs from the optimal one by the multiplication factor. *Results.* The study suggests the effective methods of uniform restoration of thermal fields. *Conclusions.* The results of the study may be used in development of numerical methods of thermal prospecting and thermodynamics problems modeling.

Key words: thermal field, uniform approximation, local spline, optimal methods, function class, Kolmogorov width, Babenko width.

Введение

При аппроксимации физических полей и, в частности, при аппроксимации тепловых полей возникает задача равномерной аппроксимации поля во всей области определения. Решение этой задачи необходимо для построения адекватной численной модели исследуемого физического процесса. Помимо равномерной аппроксимации физических полей, необходимо располагать оптимальными методами их приближения. При конструировании вычислительных алгоритмов целесообразно искать приближенные решения в экстремальных для данного круга задач пространствах. Это позволяет уменьшить вычислительные ресурсы и увеличить достоверность полученных результатов.

Такой подход был реализован при численном решении ряда задач математической физики [1, 2], при аппроксимации сопряженных функций, выраженных сингулярными и гиперсингулярными интегралами [3, 4], и при построении оптимальных методов аппроксимации и табулирования геофизических полей [5, 6].

В работе данный подход продемонстрирован на примере уравнения теплопроводности. Для этого уравнения определен класс функций $P_{r\gamma\alpha}(\Omega, M, a)$ (см. разд. 1), к которому принадлежит решение и построены сплайны, равномерно приближающие решение в рассматриваемой области.

Показано, что построенные в работе сплайны являются наилучшим по порядку методом приближения тепловых полей, представимых в классе функций $P_{r\gamma\alpha}(\Omega, M, a)$.

1. Классы функций

Для построения оптимальных методов аппроксимации физических полей любой природы необходимо определить классы функций, к которым принадлежат эти поля.

Широкий класс задач теплопроводности в одномерном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

определенным в области $0 \leq t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющим начальному значению

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Известно [7], что решение этой задачи дается формулой

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, \quad t > 0. \quad (3)$$

Определим класс функций, к которому относится функция $u(t, x)$, выраженная интегралом (3).

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до r -го порядка при $-\infty \leq x \leq \infty$, причем

$$\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |\varphi^{(k)}| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Оценим $\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right|$, $k = 0, 1, \dots$

В работе [7] показано, что $|u(t, x)| \leq M$.

Оценим $\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|$. Очевидно,

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right| \leq M.$$

Продолжая вычисления, имеем

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Оценим производные $\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k}$, $k = r+1, \dots$. Очевидно,

$$\left| \frac{\partial^{r+1} u(t, x)}{\partial x^{r+1}} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(r)}(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi) \frac{\varphi^{(r)}(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_1|}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1 = \frac{M}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}.$$

Продолжая последовательное вычисление производных, имеем

$$\left| \frac{\partial^{r+k} u(t, x)}{\partial x^{r+k}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x-\xi}{2t} \right|^k \frac{|\varphi^{(r)}(\xi)|}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (k-1) \frac{|x-\xi|^{k-2}}{(2t)^{k-1}} \frac{|\varphi^{(r)}(\xi)|}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (k-2)(k-3) \frac{|x-\xi|^{k-4}}{(2t)^{k-2}} \frac{|\varphi^{(r)}(\xi)|}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi +$$

$$+ \dots + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \dots 1 \frac{|\varphi^{(r)}(\xi)|}{(2t)^{k/2} \sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Здесь для определенности предполагается, что k – четное число. Нетрудно видеть, что случай, когда k – нечетное число, отличается множителем $(x-\xi)$ в подынтегральном выражении последнего интеграла.

Из последнего неравенства следует оценка

$$\left| \frac{\partial^{r+k} u(t, x)}{\partial x^{r+k}} \right| \leq 2^k \frac{M \frac{k!}{[k/2]!}}{(2t)^{k-[k/2]}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1, k=2m, \\ \int_0^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1, k=2m+1. \end{cases} \quad (4)$$

Отсюда при k четном

$$\left| \frac{\partial^{r+k} u(t, x)}{\partial x^{r+k}} \right| \leq \frac{2^{(k/2)-1}}{t^{k/2}} M \frac{k!}{[k/2]!},$$

а при k нечетном

$$\left| \frac{\partial^{r+k} u(t, x)}{\partial x^{r+k}} \right| \leq \frac{2^{[k/2]-1}}{t^{k/2} \sqrt{\pi}} M \frac{k!}{[k/2]!}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| \frac{\partial^{r+k} u(t, x)}{\partial x^{r+k}} \right| \leq \frac{\sqrt{\pi} 2^{(k/2)-1}}{t^{k/2}} M \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оценим производную $\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}$, $k = 1, 2, \dots$

Очевидно, при $0 < t < 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(2k+1)!!}{2^k} \frac{M}{t^{(2k+1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(2k-1)!!}{2^{k-1}} \frac{M}{t^{(2k-1)/2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi + \dots + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{M}{(2t)^{(2k+1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi|^k e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \leq 2^k \frac{Mk!}{t^k}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть функция $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеет непрерывные производные до r -го порядка включительно и $\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |\varphi^{(k)}(x)| \leq M$, $k = 0, 1, \dots, r$. В области $\Omega = \{ \infty \leq x \leq \infty, 0 < t \leq 1 \}$ решение $u(t, x)$ задачи Коши (1)–(2) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| &\leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r; \\ \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| &\leq \frac{2^{(k-r)/2}}{t^{(k-r)/2}} M \sqrt{\pi} \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = r+1, r+2, \dots; \\ \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq \frac{2^k k! M}{t^k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Замечание. В области $\Omega = [-\infty \leq x \leq \infty, 0 < t \leq T, T = \text{const}]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| &\leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r; \quad \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq c \frac{2^{(k-r)/2}}{t^{(k-r)/2}} M \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = r+1, r+2, \dots; \\ \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq \frac{c 2^k k! M}{t^k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь и ниже через c обозначена константа, не зависящая от k .

Теорема 1.1 и замечание к ней дают основание для введения следующего определения.

Определение 1.1. Пусть $\Omega = [-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T]$. Через $P_{r,\gamma}(\Omega, M, a)$ обозначим множество функций, определенных и непрерывных вместе с производными до r -го порядка в области Ω , и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r;$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \frac{a^{(k-r)/2} M}{t^{(k-r)/2}} \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = r+1, r+2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\};$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| \leq \frac{a^k k!}{t^{k-\gamma}} M, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\},$$

где a – положительная константа, $0 \leq \gamma \leq 1$.

Исследуем гладкость функции $u(t, x)$ по переменной t .

Предварительно, следуя [8, с. 455], введем замену переменных:

$$z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Тогда формула (3) принимает следующий вид:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{t}z) e^{-z^2} dz.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} |u(t_1, x) - u(t_2, x)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x + 2\sqrt{t_1}z) - \varphi(x + 2\sqrt{t_2}z)) e^{-z^2} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{2M |\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}|}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{-z^2} dz \leq \frac{4M}{\sqrt{\pi}} |t_1 - t_2|^{1/2}. \end{aligned}$$

Определение 1.2. Пусть $\Omega = \{-\infty \leq A \leq x \leq B \leq \infty, 0 \leq t \leq T\}$. Через $P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, a)$ обозначим множество функций, определенных и непрерывных вместе с производными до r -го порядка в области Ω , и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r;$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \frac{a^{(k-r)/2} M}{t^{(k-r)/2}} \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = r+1, r+2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\};$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| \leq \frac{a^k k!}{t^{k-\gamma}} M, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\};$$

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq k |t_1 - t_2|^\alpha, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T,$$

где a – положительное вещественное число, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. Аппроксимация класса функций $P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, a)$,

$$\Omega = \{-\infty < A \leq x \leq B < \infty, 0 \leq t \leq T\}$$

Для простоты обозначений положим $A=0$, $B=1$, $T=1$, $a=2$. Обозначим через Ω_0 множество точек (t, x) , удовлетворяющих неравенствам $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 2^{-N}\}$. Через Ω_k обозначим множество точек, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\{ 0 \leq x \leq 1, \frac{2^{k-1}}{2^N} \leq t \leq \frac{2^k}{2^N} \right\}.$$

Каждую область Ω_k покроем прямоугольниками Δ_i^k , у которых длина ребер, параллельных оси OX , равна h_k , $k=0, 1, \dots, N-1$. Положим

$$h_0 = \frac{\alpha N}{2^{\alpha N/r}},$$

$$h_k = \frac{N^{1/2}}{(\pi \alpha N)^{1/2 \alpha N}} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{k/2}}{2^{N/2}}, \quad k=1, 2, \dots, N-1.$$

Пусть $f(t) \in C[a, b]$. Обозначим через $L_s(f, [a, b])$ интерполяционный полином, построенный по s узлам, расположенным в сегменте $[a, b]$. В качестве узлов интерполяции можно взять равноотстоящие точки, а также узлы ортогональных многочленов, линейно отображенных с сегмента $[-1, 1]$ на $[a, b]$. В случае, когда необходимо построить непрерывное приближение, достаточно воспользоваться приемом, описанным в [9, 10].

Пусть $f(t, x) \in C(D)$, $D=[a, b; c, d]$. Через $L_{ss}(f, D)$ обозначим интерполяционный полином, действующий по формуле $L_{ss}(f, D) = L_s^t(L_s^x(f, [c, d]), [a, b])$, т.е. вначале оператор L_s^x действует на функцию $f(t, x)$ в сегменте $[c, d]$ по переменной x , а затем оператор L_s^t действует на функцию $L_s^x(f, [c, d])$ по переменной t в сегменте $[a, b]$.

В каждой области Δ_i^k , $k=0, 1, \dots, N-1$, функцию $u(t, x)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $L_{ss}(u, \Delta_i^k)$, где

$s = [\alpha N] + 1$. Сплайн, составленный из полиномов $L_{ss}(u, \Delta_i^k)$, обозначим через $S(t, x)$.

Оценим точность аппроксимации функций из множества $P_{r, \gamma, \alpha}(\Omega, 1)$ сплайном $S(t, x)$.

Оценку начнем с областей Δ_i^0 . Рассмотрим для определенности область $\Delta_0^0 = [0, 2^{-N}; 0, h_0]$. Так как функция $u(t, x)$ по переменной t удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , то

$$\max_{0 \leq t \leq 2^{-N}} \left| u(t, x) - L_s^t(u, [0, 2^{-N}]) \right| \leq \frac{c}{s^\alpha} \frac{M}{2^{N\alpha}}. \quad (5)$$

Оценим погрешность

$$\max_{\frac{2^k}{2^N} \leq t \leq \frac{2^{k+1}}{2^N}} \left| u(t, x) - L_s^t \left(u, \left[\frac{2^k}{2^N}, \frac{2^{k+1}}{2^N} \right] \right) \right|$$

при $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \max_{\frac{2^k}{2^N} \leq t \leq \frac{2^{k+1}}{2^N}} \left| u(t, x) - L_s^t \left(u, \left[\frac{2^k}{2^N}, \frac{2^{k+1}}{2^N} \right] \right) \right| \leq \\ & \leq 2^s s! M \left(\frac{2^N}{2^k} \right)^s \left(\frac{2^k}{2 \cdot 2^N} \right)^s \frac{1}{s! 2^{s-1}} \leq 2M \frac{1}{2^s} \leq 2M \frac{1}{2^{\alpha N}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Напомним, что s положено равным $s = [\alpha N] + 1$.

Так как функция $u(t, x)$ по переменной x имеет ограниченные единицей производные до r -го порядка включительно, то

$$\max_{0 \leq x \leq h_0} |u(t, x) - L_s^x(u, [0, h_0])| \leq \frac{c}{s^r} h_0^r \leq \frac{c}{2^{N\alpha}}. \quad (7)$$

Здесь $h_0 = \alpha N / 2^{N\alpha/r}$.

Рассмотрим область $\Delta_0^k = [2^{k-1-N}, 2^{k-N}; 0, h_k]$.

Оценим точность интерполяции

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq x \leq h_k} |u(t, x) - L_s^x(u, [0, h_k])| \leq 2^{(s-r)/2} M \frac{s!}{[s/2]!} \left(\frac{2^N}{2^k} \right)^{(s-r)/2} \left(\frac{h_k}{2} \right)^s \frac{1}{2^{s-1} s!} \leq \\ & \leq \frac{M}{2^{(s+r)/2}} \left(\frac{2e}{s} \right)^{s/2} \sqrt{\pi s} \left(\frac{2^N}{2^k} \right)^{(s-r)/2} \left(\frac{\alpha}{e} N \right)^{s/2} \frac{2^{sk/2}}{2^{sN/2}} \frac{1}{2^s} \left(\frac{1}{\pi \alpha N} \right)^{s/2 \alpha N} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{2^{r/2}} \left(\frac{e}{s} \right)^{s/2} \sqrt{\pi s} \frac{2^{kr/2}}{2^{Nr/2}} \left(\frac{\alpha}{e} N \right)^{s/2} \frac{1}{2^s} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha N}} = \\ &= \frac{M}{2^{r/2}} \left(\frac{e}{\alpha N} \right)^{s/2} \frac{2^{kr/2}}{2^{Nr/2}} \left(\frac{\alpha N}{e} \right)^{s/2} \frac{1}{2^s} \leq \frac{M}{2^{r/2}} \frac{2^{kr/2}}{2^{Nr/2}} \frac{1}{2^{\alpha N}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Напомним, что $s = [\alpha N] + 1$. Выше для простоты обозначений предполагалось, что αN – целое число.

Таким образом, из полученных выше оценок (5)–(8) для $|u(t, x) - L_s^t(u, \Delta_i^k)|$ и $|u(t, x) - L_s^x(u, \Delta_i^k)|$ следует, что

$$\|u(t, x) - S(t, x)\|_C \leq \frac{C \lambda_s^2}{2^{\alpha N}}, \quad (9)$$

где λ_s – константа Лебега.

Взяв в качестве узлов интерполяции образы узлов полиномов Чебышева первого рода, отображенных с сегмента $[-1, 1]$ на соответствующие сегменты, окончательно имеем

$$\|u(t, x) - S(t, x)\|_C \leq \frac{C \lambda^2 N}{2^{\alpha N}}.$$

Оценим число узлов, используемое при построении сплайна $S(t, x)$.

Общее число прямоугольников Δ_i^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, покрывающих область Ω , оценивается неравенством

$$n_* \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left\lceil \frac{1}{h_k} \right\rceil + 1 \right) \leq c \left(\frac{2^{N\alpha/r}}{\alpha N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2^{N/2}}{N^{1/2} 2^{k/2}} \right) \leq C \frac{2^{N/2}}{\sqrt{N}}.$$

Отметим, что аналогичная оценка имеет место и снизу. В каждом прямоугольнике Δ_i^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, используется s^2 узлов интерполяционного полинома $L_{ss}(u, \Delta_i^k)$. Таким образом, число узлов сплайна $S(t, s)$ равно

$$n \asymp c N^{3/2} 2^{N/2}.$$

Отсюда имеем при $n \geq 2$

$$\log_2 \left(\frac{n}{(\log_2 n)^3} \right)^2 \leq N \leq \log_2 \left(\frac{n}{(\log_2 n)^{3/2}} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\|u(t, x) - S(t, x)\|_C \leq \frac{c M \ln^2 N}{2^{\alpha N}} \leq \frac{c M \log_2^{2+3\alpha} n}{n^{2\alpha}}. \quad (10)$$

Отметим, что построенный выше сплайн $S(t, x)$ может иметь линии разрывов на границах областей Δ_i^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$. По аналогии с рассуждениями, приведенными в работах [5, 11, 12], можно построить непрерывный в области Ω сплайн, имеющий погрешность (10).

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega = [0, 1; 0, T]$.

Справедлива оценка

$$d_n(P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, 2), C) \leq \frac{cM(\log_2 n)^{2+3\alpha}}{n^{2\alpha}}.$$

Замечание 1. Здесь положено $a = 2$, так как эта константа возникает при исследовании задачи Коши (1)–(2).

Замечание 2. Используя метод оценки снизу поперечников Бабенко компактного множества $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ (см. [10]), можно показать, что

$$\delta_n(P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, 2), C) \geq \frac{cM}{n^{2\alpha}}.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством [1]

$$\delta_n(X) \leq d_n(X, C),$$

где X – компакт в банаховом пространстве B , имеем

$$\frac{cM}{n^{2\alpha}} \leq \delta_n(P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, 2), C) \leq 2d_n(P_{r,\gamma,\alpha}(\Omega, M, 2), C) \leq \frac{cM(\log_2 n)^{2+3\alpha}}{n^{2\alpha}}.$$

Список литературы

1. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.
2. **Бойков, И. В.** К задаче К. И. Бабенко об асимптотике погрешности численных решений эллиптических уравнений / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. – 2003. – № 6. – С. 3–29.
3. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. I. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензПУ, 2005. – 360 с.
4. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. II. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2009. – 252 с.
5. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки / И. В. Бойков, А. И. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – 494 с.
6. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы табулирования физических полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, Н. П. Кривулин, Г. И. Гринченков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 44–62.
7. **Петровский, И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 400 с.
8. **Кошляков, Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

9. **Бойков, И. В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 25–33.
10. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 236 с.
11. **Boykov, I. V.** Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics / I. V. Boykov. – URL : arXiv.org/abs/1303.0416.
12. **Бойков, И. В.** Поперечники Соболевских классов функций с особенностями на границе / И. В. Бойков, А. Н. Тында // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 1 (25). – С. 61–81.
13. **Бойков, И. В.** Оптимальные алгоритмы восстановления функций и вычисления интегралов на одном классе бесконечно дифференцируемых функций / И. В. Бойков // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 9. – С. 14–20.

References

1. *Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniye chislennykh algoritmov zadach matematicheskoy fiziki* [Theory and building of numerical algorithms of mathematical physics problems]. Ed. K. I. Babenko. Moscow: Nauka, 1979, 196 p.
2. Boykov I. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Ser. Estestvennye nauki* [University proceedings. Volga region. Series: Natural sciences]. 2003, no. 6, pp. 3–29.
3. Boykov I. V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. I. Singulyarnyye integraly* [Approximation methods of calculation of singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular integrals]. Penza: Izd-vo PenzPGU, 2005, 360 p.
4. Boykov I. V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. II. Gipersingulyarnyye integraly* [Approximation methods of calculation of singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals]. Penza: Izd-vo PenzGU, 2009, 252 p.
5. Boykov I. V., Boykova A. I. *Priblizhennyye metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach gravitrazvedki* [Approximation methods of solution of direct and reverse problems of gravitational exploration]. Penza: Izd-vo PGU, 2013, 494 p.
6. Boykov I. V., Boykova A. I., Krivulin N. P., Grinchenkov G. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2013, no. 4 (28), pp. 44–62.
7. Petrovskiy I. G. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on equations with partial derivatives]. Moscow: GIFML, 1961, 400 p.
8. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970, 712 p.
9. Boykov I. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 1998, vol. 38, no. 1, pp. 25–33.
10. Boykov I. V. *Optimal'nye metody priblizheniya funktsiy i vychisleniya integralov* [Optimal methods of function approximation and integral calculation]. Penza: Izd-vo PenzGU, 2007, 236 p.
11. Boykov I. V. *Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics*. Available at: arXiv.org/abs/1303.0416.
12. Boykov I. V., Tynda A. N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2013, no. 1 (25), pp. 61–81.

13. Boykov I. V. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1998, no. 9, pp. 14–20.
-

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Кривулин Николай Петрович

кандидат технических наук, доцент,
кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: krivulin@bk.ru

Krivulin Nikolay Petrovich

Candidate of engineering sciences, associate
professor, sub-department of higher
and applied mathematics, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Рязанцев Владимир Андреевич

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: ryazantsevv@mail.ru

Ryazantsev Vladimir Andreevich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 518.5

Бойков, И. В.

**Оптимальные методы аппроксимации тепловых полей / И. В. Бойков,
Н. П. Кривулин, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений.
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). –
С. 5–16.**